

1. Дана парабола, заданная уравнением $y^2 = 54x$.

Через точку A , лежащую на этой параболе, к ней провели касательную с угловым коэффициентом $\frac{3}{4}$.

(*) Найдите координаты точки A .

Точка A лежит на окружности с центром в точке M .

Известно, что данная касательная к параболе – это и касательная к окружности в точке A и что ось y – такая касательная к этой окружности, что координата x точки M меньше координаты x точки A .

(2) (1) Найдите уравнение прямой AM .

(2) Найдите уравнение этой окружности.

Точка B – некоторая точка на этой окружности. Через точку B провели касательную к окружности.

Точка P – такая точка на этой касательной, что $BP = 36$.

(2) (1) Найдите уравнение геометрического места всех точек P , полученных этим способом.

(2) Существуют ли на найденном вами геометрическом месте две точки, расстояние между которыми равно 80? Обоснуйте свой ответ.

решение :

* касательная $y = mx + b$

$$(y^2)' = 2yy' = 54 \Rightarrow m = \frac{3}{4} = \frac{54}{2y_A} \Rightarrow y_A = 36 \Rightarrow x_A = 24 \Rightarrow A(24, 36) \Rightarrow 36 = \frac{3}{4} * 24 + b \Rightarrow b = 18$$

1) касательная $y = \frac{3}{4}x + 18 \Rightarrow 3x - 4y + 72 = 0$

$$\text{прямая } (AM) \perp \text{ касательной } y = \frac{3}{4}x + 18 : y = -\frac{4}{3}x + b \Rightarrow 36 = -\frac{4}{3} * 24 + b \Rightarrow b = 68 \Rightarrow$$

$$(AM) : y = -\frac{4}{3}x + 68$$

$$2) |AM| = x_M = \frac{|3x_M - 4y_M + 72|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{\pm(3x_M - 4(-\frac{4}{3}x_M + 68) + 72)}{5} \Rightarrow$$

$$1) x_M = 60 \Rightarrow y_M = -12 \Rightarrow (60, -12)$$

$$2) x_M = 15 \Rightarrow y_M = 48 \Rightarrow (15, 48), x_M < x_A \Rightarrow M(15, 48)$$

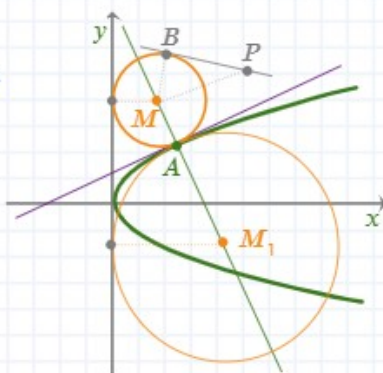
$$R = x_M \Rightarrow (x - 15)^2 + (y - 48)^2 = 15^2$$

$$1) |BP| = 36, |MP| = 15 \Rightarrow |MP| = \sqrt{36^2 + 15^2} = 39 \Rightarrow$$

$$\text{точки } P \text{ лежат на окружности } (x - 15)^2 + (y - 48)^2 = 39^2$$

2) Максимальное расстояние между точками на окружности равно диаметру $2 * 39 = 78 < 80 \Rightarrow$

Такие точки не существуют



2. На чертеже справа изображен прямоугольный параллелепипед $ABCD A' B' C' D'$.

Обозначим: $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

Точка E – середина ребра BB' .

(а) Выразите $\overrightarrow{EA}$ и $\overrightarrow{EC}$ при помощи $\underline{u}$, $\underline{v}$ и $\underline{w}$.

Для точки M выполняется $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{6}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{1}{12}\underline{w}$.

(б) Выразите $\overrightarrow{EM}$ при помощи $\underline{u}$, $\underline{v}$ и $\underline{w}$.

Дано: $\overrightarrow{EM} = a \cdot \overrightarrow{EA} + b \cdot \overrightarrow{EC}$.

a и b – параметры.

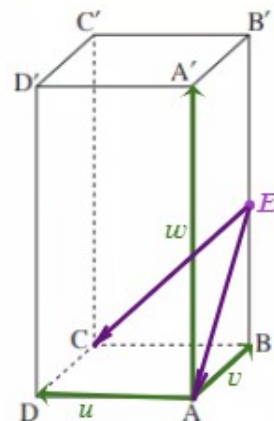
(а) (1) Найдите значение a и значение b .

(2) Лежит ли точка M на плоскости AEC ? Обоснуйте свой ответ.

Дано: $|\underline{w}| = 4$, вектор $\overrightarrow{BM}$ перпендикулярен плоскости AEC .

(г) Найдите значение $|\underline{u}|$ и значение $|\underline{v}|$.

(н) Вычислите расстояние между точкой B и плоскостью AEC .



решение:

$$\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} = \frac{\overrightarrow{B'B}}{2} + \overrightarrow{BA} = -\frac{\underline{w}}{2} - \underline{v} \Rightarrow \overrightarrow{EA} = -\frac{\underline{w}}{2} - \underline{v}$$

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} = -\frac{\underline{w}}{2} + \underline{u} \Rightarrow \overrightarrow{EC} = -\frac{\underline{w}}{2} + \underline{u}$$

$$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BM} = -\frac{\underline{w}}{2} + \frac{\underline{u}}{6} - \frac{2\underline{v}}{3} + \frac{\underline{w}}{12} = \frac{\underline{u}}{6} - \frac{2\underline{v}}{3} - \frac{5\underline{w}}{12} \Rightarrow \overrightarrow{EM} = \frac{\underline{u}}{6} - \frac{2\underline{v}}{3} - \frac{5\underline{w}}{12}$$

$$\text{1) } \overrightarrow{EM} = \frac{\underline{u}}{6} - \frac{2\underline{v}}{3} - \frac{5\underline{w}}{12} = a \cdot \left(-\frac{\underline{w}}{2} - \underline{v}\right) + b \cdot \left(-\frac{\underline{w}}{2} + \underline{u}\right) \Rightarrow b = \frac{1}{6}, a = \frac{2}{3}$$

$$\text{2) } \overrightarrow{EM} = a \cdot \overrightarrow{EA} + b \cdot \overrightarrow{EC} \Rightarrow a \cdot \overrightarrow{EA} \in (AEC), b \cdot \overrightarrow{EC} \in (AEC) \Rightarrow M \in \text{плоскости}(AEC)$$

$$\overrightarrow{BM} \perp (AEC) \Rightarrow \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{EC} \Rightarrow \overrightarrow{BM} * \overrightarrow{EA} = 0, \overrightarrow{BM} * \overrightarrow{EC} = 0 \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{BM} * \overrightarrow{EA} = \left(\frac{\underline{u}}{6} - \frac{2\underline{v}}{3} + \frac{\underline{w}}{12}\right) * \left(-\frac{\underline{w}}{2} - \underline{v}\right) = \frac{2v^2}{3} - \frac{w^2}{24} = 0 \Rightarrow \frac{2v^2}{3} - \frac{4^2}{24} = 0 \Rightarrow |\underline{v}| = 1$$

$$\overrightarrow{BM} * \overrightarrow{EC} = \left(\frac{\underline{u}}{6} - \frac{2\underline{v}}{3} + \frac{\underline{w}}{12}\right) * \left(-\frac{\underline{w}}{2} + \underline{u}\right) = \frac{u^2}{6} - \frac{w^2}{24} = 0 \Rightarrow \frac{u^2}{6} - \frac{4^2}{24} = 0 \Rightarrow |\underline{u}| = 2$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{\underline{w}}{2} + \underline{v} \Rightarrow E(0,1,2)$$

$$\overrightarrow{AC} = \underline{u} + \underline{v} \Rightarrow C(2,1,0)$$

$$A(0,0,0), B(0,1,0)$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \begin{cases} B + 2C = 0 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = C = 1, B = -2 \Rightarrow (AEC): x - 2y + z = 0$$

$$\text{расстояние от } B \text{ до плоскости } (AEC): d_B = \frac{|0 - 2 \cdot 1 + 0|}{\sqrt{1 + 2^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow d_B = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

4. Дана функция $f(x) = x^n \cdot (3 - \ln x)$, определенная для $x > 0$.

n – параметр, n – натуральное число.

(к) Найдите координаты точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью x .

Известно, что угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ в точке, в которой $x = 1$, равен 2.

(з) Найдите значение n .

Подставьте $n = 1$ в функцию $f(x)$ и ответьте на вопросы пунктов (з)–(и).

(з) Найдите координаты точки экстремума функции $f(x)$ и определите ее тип.

(т) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Дана функция $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

(н) (1) Найдите область определения функции $g(x)$.

(2) Найдите уравнения асимптот функции $g(x)$, перпендикулярных осям координат.

(3) Начертите схематический график функции $g(x)$.

a – параметр, $1 < a < 3$.

Известно, что площадь фигуры, ограниченной графиком функции $g(x)$, осью x и прямыми $x = e$ и $x = e^a$, равна $\ln 10$.

(и) Найдите значение a .

решение :

$$x f(x) = 0, x > 0 \Rightarrow \ln x = 3 \Rightarrow x = e^3 \Rightarrow (e^3, 0)$$

$$f'(x) = nx^{n-1}(3 - \ln x) + x^n \cdot \left(\frac{-1}{x}\right) = x^{n-1}(3n - \ln x - 1),$$

$$x = 1, f'(1) = 2 \Rightarrow 3n - 1 = 2 \Rightarrow n = 1$$

$$f(x) = x(3 - \ln x)$$

$$f'(x) = 2 - \ln x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2 \Rightarrow (e^2, e^2) - \text{max}$$

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow f(x) = 3x - x \ln x \rightarrow -x \ln x = \frac{-\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} \rightarrow \frac{(-\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \frac{\left(\frac{-1}{x}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} = x \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow f'(x) = 2 - \ln x \rightarrow +\infty \Rightarrow \text{касательная в точке } x = 0 \text{ вертикальна}$$

$$1) g(x) = \frac{1}{x(3 - \ln x)} \quad x \in (0, e^3) \cup (e^3, +\infty)$$

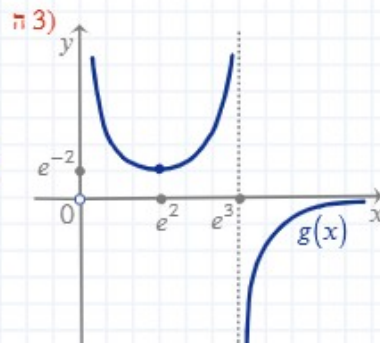
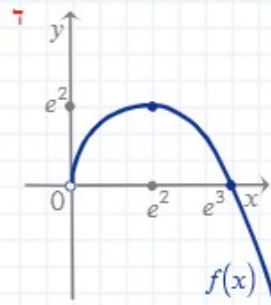
$$2) x \rightarrow 0 \Rightarrow f(x) \rightarrow 0_+ \Rightarrow g(x) \rightarrow +\infty \Rightarrow x = 0, x = e^3 - \text{вертикальные асимптоты}$$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow g(x) \rightarrow 0_- \Rightarrow y = 0 - \text{горизонтальная асимптота}$$

$$1 < a < 3 \Rightarrow 3 - \ln(e^a) = 3 - a > 0 \Rightarrow$$

$$S = \int_e^{e^a} \frac{1}{x(3 - \ln x)} dx = \int_e^{e^a} \frac{1}{(3 - \ln x)} d(\ln x) = - \int_e^{e^a} \frac{1}{(3 - \ln x)} d(3 - \ln x)$$

$$S = -\ln(3 - \ln x) \Big|_e^{e^a} = -\ln \frac{3-a}{2} = \ln 10 \Rightarrow \frac{2}{3-a} = 10 \Rightarrow a = 2.8$$



5. Дана функция $f(x) = 4e^x - x + 9 \cdot \ln(4 - e^x)$.

(к) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.

(2) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат (если таковые существуют).

(з) Покажите, что $f'(x) = \frac{-4(e^x - 1)^2}{4 - e^x}$.

(з) (1) Найдите области возрастания и убывания функции $f(x)$ (если таковые существуют).

(2) Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x)$, параллельной оси x .

(т) Начертите схематический график функции $f(x)$.

(н) (1) Найдите уравнения асимптот производной $f'(x)$, перпендикулярных осям координат.

(2) У функции $f(x)$ есть только одна точка перегиба. Начертите схематический график производной $f'(x)$ для $x < \ln 4$.

Дана функция $g(x) = f(x) + ax$, область определения которой совпадает с областью определения функции $f(x)$.

a – параметр.

(и) Воспользуйтесь графиком производной $f'(x)$ и найдите, для каких значений a у функции $g(x)$ есть две точки экстремума. Обоснуйте свой ответ.

решение:

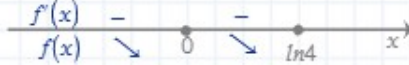
к 1) $e^x < 4 \Rightarrow x \in (-\infty, \ln 4)$

к 2) $x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$

$x \rightarrow \ln 4 \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty \Rightarrow x = \ln 4$

з $f'(x) = 4e^x - 1 - \frac{9e^x}{4 - e^x} = \frac{16e^x - 4e^{2x} - 4 + e^x - 9e^x}{4 - e^x} = \frac{-4e^{2x} + 8e^x - 4}{4 - e^x} = \frac{-4(e^x - 1)^2}{4 - e^x}$

з 1) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$



на всей области определения: $x \in (-\infty, \ln 4)$ $f(x)$ убывает

з 2) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 4 + 9\ln 3$ горизонтальная касательная

н 1) $f'(x) = \frac{-4(e^x - 1)^2}{4 - e^x}$

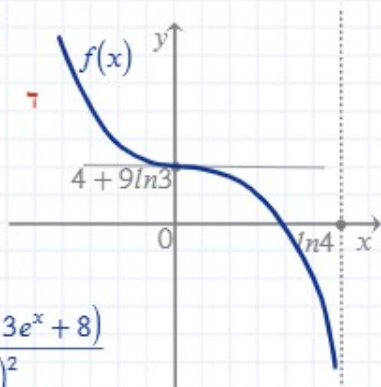
$x = \ln 4$ вертикальная асимптота

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f'(x) \rightarrow -1 \Rightarrow y = -1$ горизонтальная асимптота

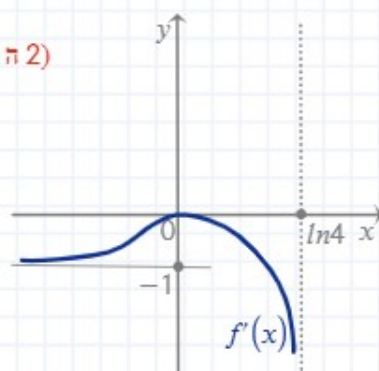
$f''(x) = (-4) \frac{2(e^x - 1)(4 - e^x) + e^x(e^x - 1)^2}{(4 - e^x)^2} = (-4) \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 3e^x + 8)}{(4 - e^x)^2}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Sign chart for f''(x). The x-axis has points 0 and ln 4. Between 0 and ln 4, f''(x) is negative. For x < 0, f''(x) is positive. For x > ln 4, f''(x) is negative.



н 2)



и $g'(x) = f'(x) + a, g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = -a \Rightarrow x \in (-1, 0)$